

Вариант №2 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 3^{y+1} = 2 \cos x \\ 3^{-y} = 4 \cos x + 1 \end{cases}$$

Решаем подстановкой

$$3^{-y} = 2 \cdot 3^{y+1} + 1; \quad 3^y = t > 0;$$

$$\frac{1}{t} = 6t + 1; \quad \rightarrow \quad 6t^2 + t - 1 = 0; \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}$$

Корень $t = -\frac{1}{2}$ не подходит, т.к. $3^y > 0$

$$\text{Тогда } 3^y = \frac{1}{3}; \quad \rightarrow \quad y = -1$$

$$\text{Находим } x. \quad 2 \cos x = 1; \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad y = -1;$$

Вариант №3 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sin x = y - 3 \\ \cos x = y - 2 \end{cases}$$

Используем основное тригонометрическое тождество.

$$(y - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

$$2y^2 - 10y + 13 = 1$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y = 2; 3$$

$$\text{Если } y = 2, \text{ то } \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } y = 3, \text{ то } \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad y = 2$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad y = 3$$

Вариант №4 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sin y = x - 6 \\ \cos y = x - 7 \end{cases}$$

Используем основное тригонометрическое тождество.

$$(x - 6)^2 + (x - 7)^2 = 1$$

$$2x^2 - 26x + 85 = 1$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$x = 6; 7$$

$$\text{Если } x = 7, \text{ то } \begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } y = 6, \text{ то } \begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = -1 \end{cases} \rightarrow y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = 7; \quad y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = 6; \quad y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

Вариант №5 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 2^x = \sin y \\ 2^{-x} = 2 \sin y + 1 \end{cases}$$

Решаем подстановкой, обозначив $2^x = t > 0$

$$\frac{1}{t} = 2t + 1$$

$$2t^2 + t - 1 = 0; \quad t = -1; \frac{1}{2}$$

$$\text{Т.к. } t > 0, \text{ то } t = \frac{1}{2} \rightarrow x = -1$$

Найдем y .

$$\sin y = \frac{1}{2} \rightarrow y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -1; \quad y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Вариант №6 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 81^{\sin y} - 30 \cdot 9^{\sin y} + 81 = 0 \\ \sqrt{x} + 2 \cos y = 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение системы может иметь решения только при $\cos y \leq 0$.

Решим первое уравнение, обозначив $9^{\sin y} = t > 0$.

$$t^2 - 30t + 81 = 0; \rightarrow t = 27; 3 \rightarrow 9^{\sin y} = 3^{2 \sin y} = 27; 3 \rightarrow 2 \sin y = 3; 1$$

$$\sin y \neq \frac{3}{2} > 1; \quad \sin y = \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Т.к. } \cos y \leq 0, \text{ то } y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Находим x .

$$y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{x} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \rightarrow x = 3;$$

$$\text{Ответ: } x = 3; \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Вариант №7 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 2 \sin^2 y + 3 \sin y - 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - x} + 4 \cos y = 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение системы может иметь решения только при $\cos y \leq 0$.

Решим первое уравнение, обозначив $\sin y = t$.

$$2t^2 + 3t - 2 = 0; \rightarrow t = -2; \frac{1}{2};$$

$$\sin y \neq -2 < -1; \quad \sin y = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

С учетом того, что $\cos y \leq 0$ получаем:

$$y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Находим x .

$$\sqrt{x^2 - x} - 2\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - x = 12 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = 4; -3$$

$$\text{Ответ: } x = 4; y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = -3; y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Вариант №8 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 3 \sin x = \cos 2x + 1 \\ \sqrt{y^2 + 6y} + 6 \cos x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение системы может иметь решения только при $\cos x \leq 0$.
Решим первое уравнение, обозначив $\sin x = t$.

$$3 \sin x = 1 - 2 \sin^2 x + 1$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \rightarrow t = -2; \frac{1}{2};$$

$$\sin x \neq -2 < -1; \quad \sin x = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

С учетом того, что $\cos x \leq 0$ получаем:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Находим y .

$$\sqrt{y^2 + 6y} - 3\sqrt{3} = 0;$$

$$y^2 + 6y = 27; \rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0; \rightarrow y = -9; 3$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = -9; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = 3;$$

Вариант №9 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16} = x - 2y \\ y^2 - 2xy + 16 = 0 \end{cases}$$

Разберемся с первым уравнением.

$$\sqrt{2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16} = x - 2y$$

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x = 4; -4;$$

Найдем y из второго уравнения:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y^2 - 8y + 16 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -4 \\ y^2 + 8y + 16 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$$

Само собой, надо сделать проверку. При подстановке в первое уравнение видно, что первая пара корней не подходит.

$$\text{Ответ: } x = -4; \quad y = -4;$$

Вариант №10 С1 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} \sqrt{2y^2 - 2xy + x^2 - 25} = y - x \\ x^2 - 4xy + 100 = 0 \end{cases}$$

Разберемся с первым уравнением.

$$\sqrt{2y^2 - 2xy + x^2 - 25} = y - x$$

$$2y^2 - 2xy + x^2 - 25 = y^2 - 2xy + x^2$$

$$y^2 - 25 = 0$$

$$y = 5; -5$$

Найдем x из второго уравнения:

$$\begin{cases} y = 5 \\ x^2 - 20x + 100 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -5 \\ x^2 + 20x + 100 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = -5 \end{cases}$$

Само собой, надо сделать проверку. При подстановке в первое уравнение видно, что первая пара корней не подходит.

Ответ: $x = -10$; $y = -5$;

Вариант 2 С3

Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2)$$

Сначала ограничения на основание логарифма:

$$\frac{3x-1}{x+2} > 0 \rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1/3; \infty)$$

$$\frac{3x-1}{x+2} \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

Еще ограничения:

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ -3x^2 + 11x - 6 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (0,5; \infty) \\ x \in (2/3; 3) \end{cases} \rightarrow x \in (2/3; 3) \quad (1)$$

Все вместе дает $x \in \left(\frac{2}{3}; 3\right), x \neq \frac{3}{2}$.

Теперь само неравенство:

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) - \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2) \geq 0$$

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}} \frac{2x^2 + x - 1}{-3x^2 + 11x - 6} \geq 0$$

1) Случай $\frac{3x-1}{x+2} > 1 \rightarrow \frac{2x-3}{x+2} > 0 \rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$

С учетом (1): $x \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$

Получаем:

$$\frac{2x^2 + x - 1}{-3x^2 + 11x - 6} \geq 1 \rightarrow \frac{2x^2 + x - 1 + 3x^2 - 11x + 6}{-3x^2 + 11x - 6} \geq 0 \rightarrow \frac{5x^2 - 10x + 5}{-3x^2 + 11x - 6} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 11x + 6} \leq 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{3(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)} \leq 0 \quad x \in \left(\frac{2}{3}; 3\right)$$

Т.к. $x \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$, то решение в этом случае имеет вид $x \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

2) Случай $\frac{3x-1}{x+2} < 1 \rightarrow \frac{2x-3}{x+2} < 0 \rightarrow x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right)$

С учетом (1): $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$

Получаем:

$$\frac{2x^2 + x - 1}{-3x^2 + 11x - 6} \leq 1 \rightarrow \frac{2x^2 + x - 1 + 3x^2 - 11x + 6}{-3x^2 + 11x - 6} \leq 0 \rightarrow \frac{5x^2 - 10x + 5}{-3x^2 + 11x - 6} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 11x + 6} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{3(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)} \geq 0 \quad x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (3; \infty) \cup \{1\}$$

Т.к. $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$, то решение в этом случае имеет вид $x = 1$.

Окончательно: $x \in \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

<http://alexlarin.narod.ru>

Вариант 3 С3

Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2} - (0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \leq 0$$

Рассмотрим сначала случай $5^x - 1 > 0 \rightarrow 5^x > 1 \rightarrow x > 0$

Тогда $4^{x^2+3x-2} - (0,5)^{2x^2+2x-1} \leq 0$

$$4^{x^2+3x-2} \leq (0,5)^{2x^2+2x-1} \rightarrow 2^{2x^2+6x-4} \leq 2^{-2x^2-2x+1}$$

$$2x^2 + 6x - 4 \leq -2x^2 - 2x + 1 \rightarrow 4x^2 + 8x - 5 \leq 0 \rightarrow x \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

Т.к. $x > 0$, то $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Теперь случай $5^x - 1 < 0 \rightarrow 5^x < 1 \rightarrow x < 0$

Тогда $4^{x^2+3x-2} - (0,5)^{2x^2+2x-1} \geq 0$

$$4^{x^2+3x-2} \geq (0,5)^{2x^2+2x-1} \rightarrow 2^{2x^2+6x-4} \geq 2^{-2x^2-2x+1}$$

$$2x^2 + 6x - 4 \geq -2x^2 - 2x + 1 \rightarrow 4x^2 + 8x - 5 \geq 0 \rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$$

Т.к. $x < 0$, то $x \in x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right]$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Вариант 4 С3

Решите неравенство:
$$\frac{\log_{0,2} \frac{1}{2x-1} + \log_5(2-x)}{\log_5(2x-1) + \log_{0,2} \frac{1}{3-2x}} \geq 0$$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \\ 3-2x > 0 \\ \log_5(2x-1) \neq -\log_5(3-2x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 2 \\ x < \frac{3}{2} \\ 6x-3-4x^2+2x-1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\frac{\log_5(2x-1) + \log_5(2-x)}{\log_5(2x-1) + \log_5(3-2x)} \geq 0$$

$$\frac{\log_5(4x-2x^2-2+x)}{\log_5(6x-4x^2-3+2x)} \geq 0$$

$$\begin{cases} -2x^2-5x-2 \leq 1 \\ -4x^2+8x-3 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2+5x+3 \geq 0 \\ 4x^2-8x+4 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \\ (x-2) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{нет решений} \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2x^2-5x-2 \geq 1 \\ -4x^2+8x-3 > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2+5x+3 \leq 0 \\ 4x^2-8x+4 < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \leq 1, x \geq \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

С учетом ограничений получаем $\frac{1}{2} < x < 1$

Ответ: $\frac{1}{2} < x < 1$

Вариант 5 С5

Решите неравенство: $\log_{2x+3} x^2 < 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 2x+3 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\begin{cases} 2x+3 > 1 \\ x^2 < 2x+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x < -1 \end{cases}$$

С учетом ограничений получаем: $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0; 3)$

Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0; 3)$

Вариант 6 С3

Решите неравенство: $\log_x(\log_9(3^x - 9)) < 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_9(3^x - 9) > 0 \\ 3^x - 9 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 3^x - 9 > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > \log_3 10 \end{cases} \rightarrow x > \log_3 10$$

Теперь само неравенство:

Заметим, что т.к. $x > \log_3 10$, то $x > 1$, тогда $\log_9(3^x - 9) < x$.

$$3^x - 9 < 9^x$$

$$9^x - 3^x + 9 > 0$$

$$D = 1 - 36 < 0$$

т.е. неравенство выполнено при любом x .

Ответ: $x \in (\log_3 10; \infty)$

Вариант 7 С3

Решите неравенство: $\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \geq 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 3 \cdot 2^{x-1} - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2^{x-1} > \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x-1 > -\log_2 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > \log_2 \frac{2}{3} \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x}{x} \geq 0$$

$$\left[\begin{cases} \log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} 2^x - 1 \geq 2^x \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} 2^x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases} \right.$$
$$\left[\begin{cases} \log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} 2^x - 1 \leq 2^x \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} 2^x \leq 1 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases} \right.$$

С учетом ограничений: $x \in \left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right) \cup [1; \infty)$

Ответ: $x \in \left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right) \cup [1; \infty)$

Вариант 8 С3

Решите неравенство:

$$\log_5(x+2) + \log_5(1-x) \leq \log_5((1-x)(x^2 - 8x - 8))$$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ 1-x > 0 \\ (1-x)(x^2 - 8x - 8) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 1 \\ x^2 - 8x - 8 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 1 \\ x < 4 - 2\sqrt{6}; \quad x > 4 + 2\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \in (-2; 4 - 2\sqrt{6})$$

Теперь само неравенство:

$$\log_5(x+2)(1-x) \leq \log_5((1-x)(x^2 - 8x - 8))$$

$$(x+2)(1-x) \leq (1-x)(x^2 - 8x - 8)$$

$$(1-x)(x^2 - 9x - 10) \geq 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-10) \leq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; 10]$$

$$\text{С учетом ограничений: } x \in (-2; -1]$$

$$\text{Ответ: } x \in (-2; -1]$$

Вариант 9 С3

Решите неравенство: $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$.

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3-x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ x \neq 1 \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{3-x} < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{3-x} > 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ x \neq 1 \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x \neq 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \rightarrow 1 < x < 2$$

Заметим, что при этих условиях $0 < \frac{x}{3} < 1$

Тогда само неравенство:

$$\begin{aligned} \log_x \sqrt{3-x} \leq 1 &\rightarrow \sqrt{3-x} \geq x \rightarrow 3-x \geq x^2 \rightarrow x^2 + x - 3 \leq 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Окончательно: $x \in \left[\frac{\sqrt{13}-1}{2}; 2 \right)$

Ответ: $x \in \left[\frac{\sqrt{13}-1}{2}; 2 \right)$

Вариант 10 С3

Решите неравенство: $\log_{x+1}(19+18x-x^2) - \frac{1}{16}\log_{x+1}^2(x-19)^2 \geq 2$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ x \neq 19 \\ 19+18x-x^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 19 \\ -1 < x < 19 \end{cases} \rightarrow x \in (-1;0) \cup (0;19)$$

Теперь само неравенство:

$$\log_{x+1}(x+1) + \log_{x+1}(19-x) - \frac{1}{4}\log_{x+1}^2(19-x) \geq 2$$

$$\frac{1}{4}\log_{x+1}^2(19-x) - \log_{x+1}(19-x) + 1 \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\log_{x+1}(19-x) - 1\right)^2 \leq 0$$

$$\log_{x+1}(19-x) = 2$$

$$19-x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$x = -6; 3$$

С учетом ограничений $x = 3$

Ответ: $x = 3$

Вариант 2 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 + 4x + \left| x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \right| - a$$

Принимает только неотрицательные значения.

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \rightarrow x = 2; -\frac{1}{2}$$

$$1) x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty) \quad f(x) = 2x^2 + \frac{5}{2}x - 1 - a$$

Т.к. ветви параболы $f(x)$ направлены вверх, вершина $x = -\frac{5}{8}$ для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(-\frac{5}{8}\right) \geq 0 \rightarrow \frac{25}{32} - \frac{25}{16} - 1 - a \geq 0 \rightarrow -\frac{57}{32} - a \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{57}{32}$$

$$2) x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \quad f(x) = \frac{11}{2}x + 1 - a$$

Функция $f(x)$ - возрастающая прямая, таким образом, для выполнения условия задачи

необходимо и достаточно, чтобы $f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0$

$$-\frac{11}{4} + 1 - a \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{7}{4}$$

$$\text{Ответ: } a \leq -\frac{57}{32}$$

Вариант 3 С5

При каких a уравнение

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$$

имеет ровно 8 корней?

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 - x^2 = 4\pi^2 n^2 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 = a^2 - 4\pi^2 n^2 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 = a^2 - 4\pi^2 n^2 = a^2; a^2 - 4\pi^2; a^2 - 16\pi^2; a^2 - 36\pi^2 - \text{должны}$$

давать восемь искомым корней

Необходимо чтобы $a^2 - 36\pi^2 > 0$, а $a^2 - 64\pi^2 < 0$

$$\begin{cases} a > 6\pi \\ a < -6\pi \\ -8\pi < a < 8\pi \end{cases} \Rightarrow a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$$

Ответ : $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$

Вариант 4 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

Рассмотрим функции

$$f(x) = 3x + |2x + |a - x|| \quad \text{и} \quad g(x) = 7|x + 2|$$

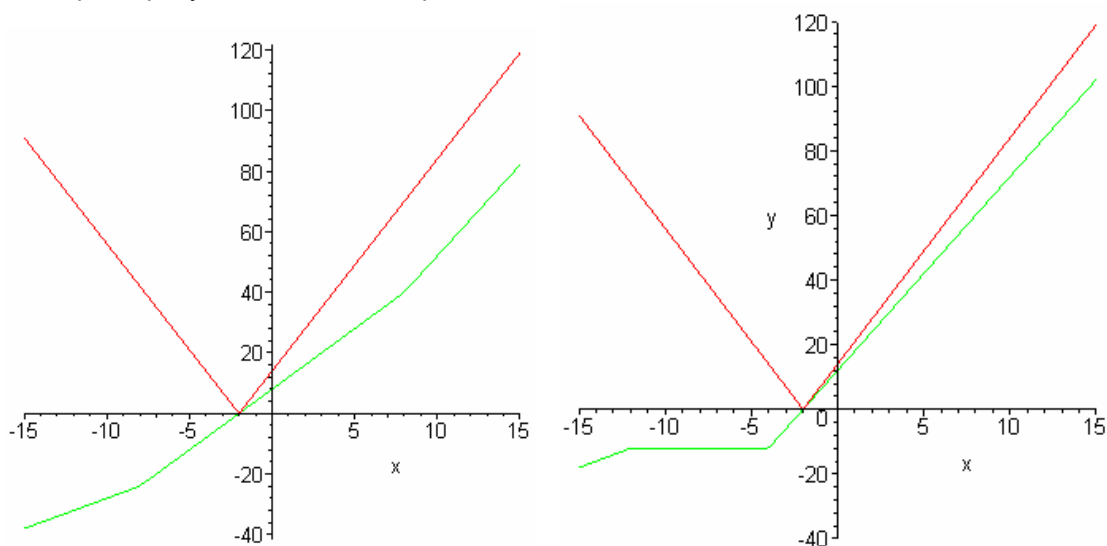
$$1. \ x \geq a \rightarrow f(x) = 3x + |3x - a| = \begin{cases} a, & x \leq \frac{a}{3} \\ 6x - a, & x > \frac{a}{3} \end{cases}$$

$$2. \ x < a \rightarrow f(x) = 3x + |x + a| = \begin{cases} 2x - a, & x \leq -a \\ 4x + a, & x > -a \end{cases}$$

Заметим, что угловый коэффициент ломаной $g(x)$ равен 7 или -7, а ломаной $f(x)$

2, 4 или 6 при $a > 0$ и 0, 6 и 2 при $a < 0$

На первом рисунке $a > 0$, на втором - $a < 0$



Для выполнения условия задачи необходимо:

$$f(-2) = -6 + |-4 + |a + 2|| \geq 0$$

$$|-4 + |a + 2|| \geq 6 \quad \begin{cases} -4 + |a + 2| \geq 6 \\ -4 + |a + 2| \leq -6 \end{cases} \quad \begin{cases} |a + 2| \geq 10 \\ |a + 2| \leq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} a + 2 \geq 10 \\ a + 2 \leq -10 \end{cases} \\ \text{невозможно} \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 8 \\ a \leq -12 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -12] \cup [8; \infty)$$

Вариант 5 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$5x - |3x - |x + a|| = 10|x - 2|$$

имеет хотя бы один корень.

Рассмотрим функции

$$f(x) = 5x - |3x - |x + a|| \quad \text{и} \quad g(x) = 10|x - 2|$$

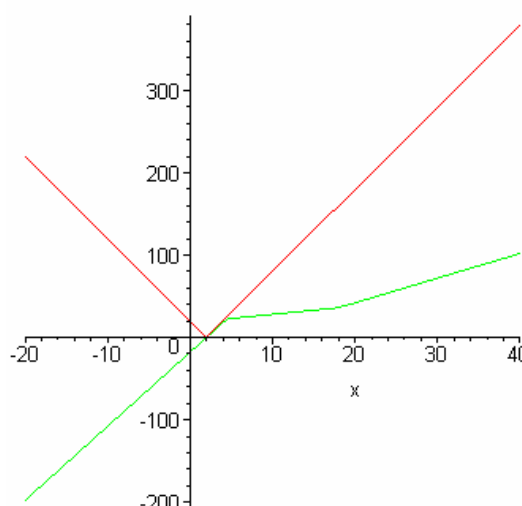
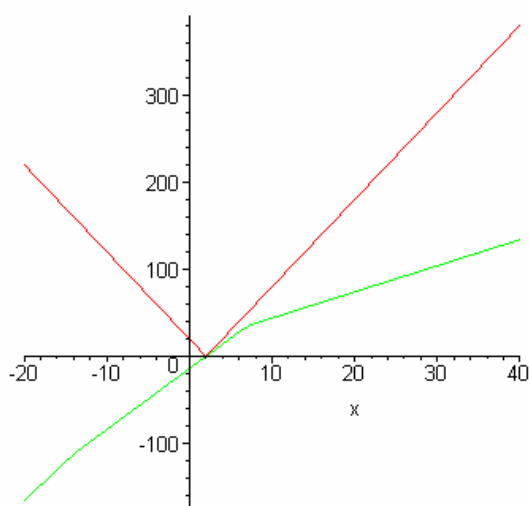
$$1. \ x \geq -a \rightarrow f(x) = 5x - |2x + a| = \begin{cases} 7x - a, & x \leq -\frac{a}{2} \\ 3x - a, & x > -\frac{a}{2} \end{cases}$$

$$2. \ x < -a \rightarrow f(x) = 5x - |4x - a| = \begin{cases} 9x + a, & x \leq \frac{a}{4} \\ x + a, & x > \frac{a}{4} \end{cases}$$

Заметим, что угловый коэффициент ломаной $g(x)$ равен 10 или -10, а ломаной $f(x)$

7, 3 или 1 при $a > 0$ и 3, 9 и 1 при $a < 0$

На первом рисунке $a > 0$, на втором - $a < 0$



Для выполнения условия задачи необходимо:

$$f(2) = 10 - |6 - |a + 2|| \geq 0$$

$$|6 - |a + 2|| \leq 10$$

$$-10 \leq 6 - |a + 2| \leq 10$$

$$-16 \leq -|a + 2| \leq 4 \rightarrow -4 \leq |a + 2| \leq 16 \rightarrow -16 \leq a + 2 \leq 16 \rightarrow -18 \leq a \leq 14$$

Ответ: $a \in [-18; 14]$

Вариант 6 С5

Найдите все такие a , что наименьшее значение функции

$$f(x) = 4|x - a| + |x^2 + 2x - 3| \text{ меньше } 4.$$

Варианты раскрытия модулей:

$$f(x) = 4x - 4a + x^2 + 2x - 3 = x^2 + 6x - 4a - 3$$

$$f(x) = -4x + 4a + x^2 + 2x - 3 = x^2 - 2x + 4a - 3$$

$$f(x) = -4x + 4a - x^2 - 2x + 3 = -x^2 - 6x + 4a + 3$$

$$f(x) = 4x - 4a - x^2 - 2x + 3 = -x^2 + 2x - 4a + 3$$

Наименьшее значение этой функции может быть либо в вершине параболы, либо в граничных точках, т.е. $x = -1$, $x = 1$, $x = -3$, $x = a$, или в минимумах функций, получающихся при раскрытии модулей, т.е. опять же в точках $x = 1$, $x = -3$.

Тогда для выполнения условия задачи необходимо

$$\begin{cases} f(-1) < 4 \\ f(1) < 4 \\ f(-3) < 4 \\ f(a) < 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4|-1-a| + 4 < 4 \\ 4|1-a| < 4 \\ 4|-3-a| < 4 \\ |a^2 + 2a - 3| < 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |-1-a| < 0 \\ -1 < 1-a < 1 \\ -1 < -3-a < 1 \\ -4 < a^2 + 2a - 3 < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \\ -4 < a < -2 \\ \begin{cases} a^2 + 2a - 7 < 0 \\ a^2 + 2a + 1 > 0 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < a < 2 \\ -4 < a < -2 \\ -1 - 2\sqrt{2} < a < -1 + 2\sqrt{2}, \quad a \neq -1 \end{cases}$$

Итого: $a \in (-4; -1) \cup (-1; 2)$

Вариант 7 С5

При каких a уравнение

$$\sin(\sqrt{a^2 - x^2}) = 0$$

имеет ровно 8 корней?

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 - x^2 = \pi^2 n^2 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 = a^2 - \pi^2 n^2 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 = a^2 - \pi^2 n^2 = a^2; a^2 - \pi^2; a^2 - 4\pi^2; a^2 - 9\pi^2 - \text{должны}$$

давать восемь искомым корней

$$\text{Необходимо чтобы } a^2 - 9\pi^2 > 0, a^2 - 16\pi^2 < 0$$

$$\begin{cases} a > 3\pi \\ a < -3\pi \\ -4\pi < a < 4\pi \end{cases} \Rightarrow a \in (-4\pi; -3\pi) \cup (3\pi; 4\pi)$$

$$\text{Ответ : } a \in (-4\pi; -3\pi) \cup (3\pi; 4\pi)$$

Вариант 8 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых общие решения неравенств $y + 2x \geq a$ и $y - x \geq 2a$ являются решениями неравенства $2y - x > a + 3$.

Найдем точку пересечения прямых $y = -2x + a$ и $y = x + 2a \rightarrow x_0 = -\frac{a}{3}; y_0 = \frac{5a}{3};$

Решением системы заданных неравенств будет область, расположенная выше каждой из этих прямых.

Угловым коэффициентом прямой $y = \frac{x}{2} + \frac{a+3}{2}$ равен $\frac{1}{2}$, для выполнения условия задачи

достаточно выполнения условия:

$$\frac{x_0}{2} + \frac{a+3}{2} < y_0$$

$$x_0 + a + 3 < 2y_0$$

$$-\frac{a}{3} + a + 3 < \frac{10a}{3}$$

$$-a + 3a + 9 < 10a$$

$$8a > 9$$

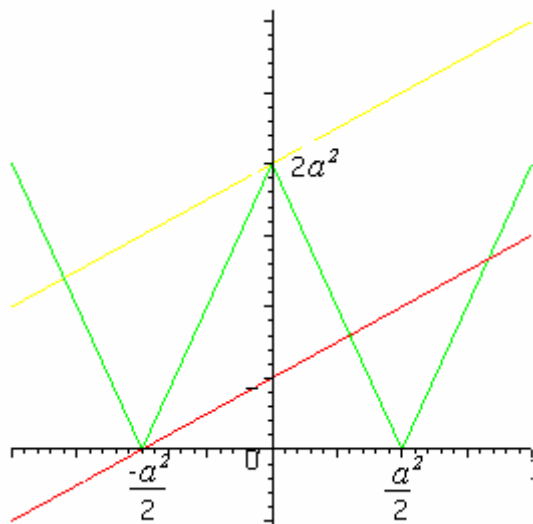
$$a > \frac{9}{8}$$

Ответ: $a > \frac{9}{8}$

Вариант 9 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = 2|2|x| - a^2| - x + a$ имеет ровно три нуля функции.

Рассмотрим схематические графики двух функций:
 $g(x) = 2|2|x| - a^2|$
 $f(x) = x - a$



На рисунке отмечены два положения прямой $f(x)$, при которых графики данных функций имеют три точки пересечения, т.е. выполняется условие задачи.

Аналитически (подставляя в исходное уравнение):

$$1) f(0) = 2a^2 \rightarrow 2|0 - a^2| - 0 + a = 0; \rightarrow 2a^2 + a = 0 \rightarrow a = 0; a = -\frac{1}{2};$$

$$2) f\left(-\frac{a^2}{2}\right) = 0 \rightarrow 0 + \frac{a^2}{2} + a = 0; \rightarrow a = 0; a = -2;$$

Заметим, что при $a = 0 \rightarrow 4|x| = x$ - не может иметь трех корней.

Ответ: $a = -\frac{1}{2}; a = -2$.

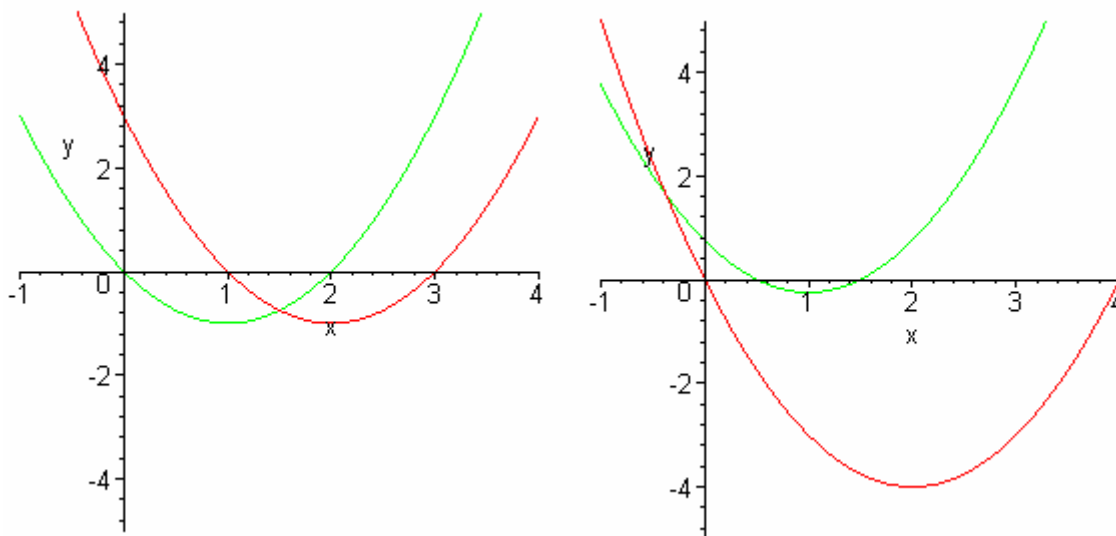
Вариант 10 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых общие решения неравенств $x^2 - 2x \leq a - 1$ и $x^2 - 4x \leq 1 - 4a$ образуют на числовой оси отрезок длиной единица.

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leq a - 1 \\ x^2 - 4x \leq 1 - 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - a \leq 0 \\ x^2 - 4x - 1 + 4a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 - a \leq 0 \\ (x-2)^2 + 4a - 5 \leq 0 \end{cases}$$

Очевидно, что для выполнения условия необходимо $a \geq 0$; $5 - 4a \geq 0$; $\rightarrow a \in \left[0; \frac{5}{4}\right]$

Для выполнения условия задачи возможно три случая взаимного расположения парабол



Для первого случая разность большего корня уравнения $(x-1)^2 - a = 0$ и меньшего корня уравнения $(x-2)^2 + 4a - 5 = 0$ должна равняться 1.

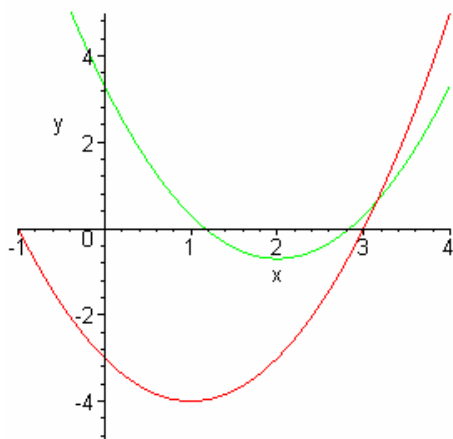
Т.е. $1 + \sqrt{a} - (2 - \sqrt{5 - 4a}) = 1$; $\sqrt{a} + \sqrt{5 - 4a} = 2$; $5 - 4a = 4 - 4\sqrt{a} + a$;

$5a - 4\sqrt{a} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{a} = 1 \rightarrow a = 1$;

Для второго случая разность корней первого уравнения должна быть равна 1.

Т.е. $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$; $\rightarrow a = \frac{1}{4}$; Корни первого уравнения будут равны 0,5 и 1,5; корни второго уравнения будут равны 0 и 4, т.е. условия выполняются.

В принципе, необходимо рассмотреть еще один случай:



Тогда разность корней второго уравнения должна быть равна 1, при этом $a = \frac{19}{16}$;

И еще должно выполняться условие $2 + \sqrt{5 - 4a} \leq 1 + \sqrt{a}$, тогда

$$-1 + \sqrt{\frac{19}{16}} \geq \sqrt{5 - \frac{19}{4}} \rightarrow \frac{-4 + \sqrt{19}}{4} \geq \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{19} \geq 6, \text{ что невозможно.}$$

Ответ: $a = 1$; $a = \frac{1}{4}$;

<http://alexlarin.narod.ru>