

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

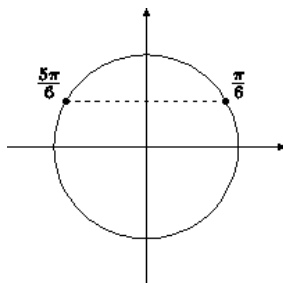
Решение:

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \leq 0$.

Выражение $\sqrt{-\cos x} + 1$ положительно при всех допустимых x .

Значит, $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Так как $\cos x \leq 0$, числа $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ не являются решениями уравнения.



Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которой равен нулю множитель $2\sin x - 1$. Имеется указание на то, что второй множитель отличен от нуля, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$.

Решение:

M – середина AD_1 , N – середина BC_1 .

Проведем перпендикуляр NH из точки N к плоскости $AB_1 D_1$, $NM \perp AD_1$, Значит $NM \perp AD_1$.

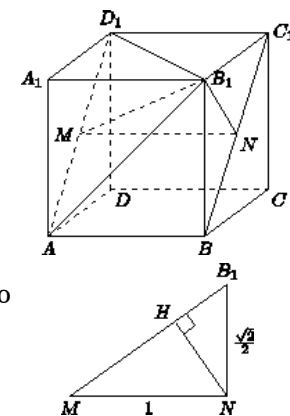
Поэтому точка H лежит на отрезке MB_1 , перпендикулярном AD_1 .

Искомый отрезок NH является высотой прямоугольного треугольника MNB_1 с прямым углом N . Поэтому

$$NH = \frac{NB_1 \cdot NM}{MB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



C3 Решите неравенство $\left(2x - 3 - \frac{5}{x}\right)\left(\frac{14}{x+1} + 2 + (\sqrt{-1-2x})^2\right) \geq 0$.

Решение:

Левая часть неравенства имеет смысл при $x \neq 0, x \neq -1, -1 - 2x \geq 0$, т.е. при $x \neq -1, x \leq -0,5$.

Приводя выражения в скобках к общему знаменателю, для таких x получаем:

$$\left(2x - 3 - \frac{5}{x}\right)\left(\frac{14}{x+1} + 1 - 2x\right) \geq 0; \quad \frac{2x^2 - 3x - 5}{x} \cdot \frac{15 - 2x^2 - x}{x+1} \geq 0;$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 5}{x} \cdot \frac{2x^2 + x - 15}{x + 1} \leq 0; \quad \frac{(2x - 5)(x + 1)}{x} \cdot \frac{(2x - 5)(x + 3)}{x + 1} \leq 0;$$

$$\frac{(2x - 5)^2(x + 3)(x + 1)}{x(x + 1)} \leq 0.$$

Решение полученного неравенства: $-3 \leq x < -1$ или $-1 < x < 0$ или $x = 2, 5$.
Остается учесть условие $x \leq -0, 5$.

Ответ: $[-3; -1) \cup (-1; -0, 5]$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам. Получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, в которых определено исходное неравенство	2
Решение содержит верные преобразования правого множителя левой части неравенства, сводящие его к произведению и частному линейных выражений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C , а на другой – точки A и B , причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение:

Пусть r – искомый радиус, а точка H – основание высоты CH треугольника ABC .

1 случай. Точка C – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC = BC = 13$, и CH – медиана треугольника ABC .

Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, \quad AB = 2AH = 10.$$

Тогда, если p – полупериметр треугольника, то

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AH \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}.$$

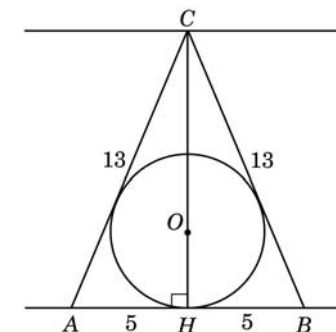


Рис.1

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек A или B . Пусть, для определенности, вершина в точке B .

Проведем высоту CH . Если H находится на продолжении стороны AB , то треугольник ABC тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника BHC находим:

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, \quad AH = 13 - 5 = 8.$$

Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{13 \cdot 6}{\frac{1}{2}(26 + 4\sqrt{13})} = \frac{13 \cdot 6}{13 + 2\sqrt{13}} = \frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$.

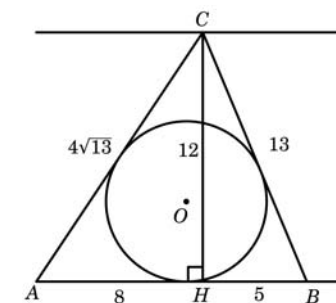


Рис.2

Содержание критерия оценивания	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен <u>правильный ответ</u>	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено <u>правильное значение искомой величины</u>	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, <u>неправильное из-за арифметической ошибки</u>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

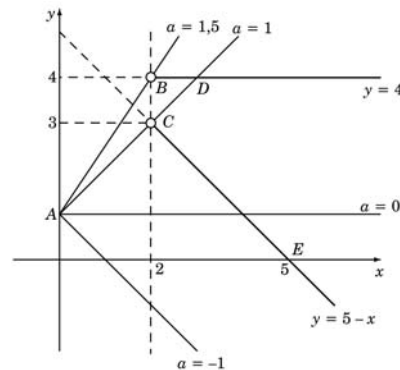
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

Уравнение $(y-4)(x+y-5) = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = 4$ и $y = 5 - x$.

Система

$$\begin{cases} (y-4)(x+y-5) = 0, \\ x > 2 \end{cases}$$



задает части этих прямых, расположенные правее прямой $x = 2$, т.е. лучи BD и CE без точек B и C (см. рис.). Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a , проходящую через точку $A(0;1)$. Следует найти все значения a , при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE .

- а) Прямая AB задается уравнением $y = 1,5x + 1$. Поэтому при $a \geq 1,5$ прямая m не пересекает ни луч BD , ни луч CE .
- б) Прямая AC задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при $1 \leq a < 1,5$ прямая m пересекает луч BD , но не пересекает луч CE .
- в) При $0 < a < 1$ прямая m пересекает и луч BD , и луч CE .
- г) Наконец, при $-1 < a \leq 0$ прямая m пересекает только луч CE , а при $a \leq -1$ она не пересекает ни луч BD , ни луч CE .

Ответ: $-1 < a \leq 0, 1 \leq a < 1,5$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен <u>правильный ответ</u>	4
Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	3
Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	2
Решение содержит: - или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи; - или верное получение квадратного уравнения с параметром a относительно одной из переменных	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

С6 Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение:

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2 + \dots + 7)(13 + \dots + 21) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{13+21}{2} \cdot 9\right) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7)(-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 + 20 + 21) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1 и 4131.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

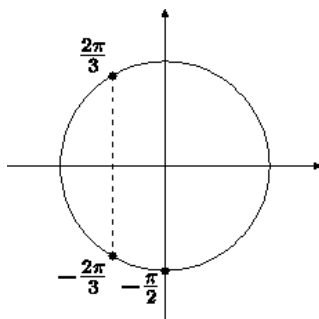
Решение:

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x \leq 0$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 = 0$, то $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 \neq 0$, то $2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Так как $\sin x \leq 0$, числа $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не являются решениями уравнения.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю множитель $2\cos x + 1$ или множитель $\sqrt{-\sin x} - 1$, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите угол между плоскостями $AB_1 D_1$ и $AC D_1$.

Решение:

Пусть M – середина AD_1 , и пусть ребро куба равно 1.

Поскольку треугольники $AB_1 D_1$ и $AC D_1$ правильные, $B_1 M \perp AD_1$ и $CM \perp AD_1$, то есть угол $CM B_1$ – линейный угол искомого двугранного угла.

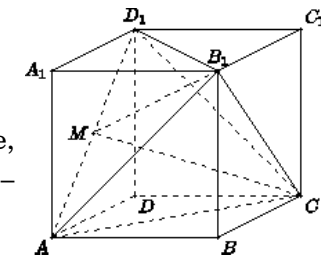
Найдем стороны треугольника $CM B_1$:

$$B_1 C = \sqrt{2}, CM = MB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Применяя к этому треугольнику теорему косинусов, находим:

$$\cos \angle CM B_1 = \frac{MB_1^2 + CM^2 - B_1 C^2}{2MB_1 \cdot CM} = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.



Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство $\left(2x + 1 - \frac{6}{x}\right) \left(\frac{28}{x+2} - 2 + (\sqrt{-3-2x})^2\right) \geq 0$.

Решение:

Левая часть неравенства имеет смысл при $x \neq 0, x \neq -2, -3 - 2x \geq 0$, т.е. при $x \neq -2, x \leq -1, 5$.

Приводя выражения в скобках к общему знаменателю, для таких x получаем:

$$\left(2x + 1 - \frac{6}{x}\right) \left(\frac{28}{x+2} - 5 - 2x\right) \geq 0; \quad \frac{2x^2 + x - 6}{x} \cdot \frac{18 - 2x^2 - 9x}{x+2} \geq 0;$$

$$\frac{2x^2 + x - 6}{x} \cdot \frac{2x^2 + 9x - 18}{x + 2} \leq 0; \quad \frac{(2x - 3)(x + 2)}{x} \cdot \frac{(2x - 3)(x + 6)}{x + 2} \leq 0;$$

$$\frac{(2x - 3)^2(x + 6)(x + 2)}{x(x + 2)} \leq 0.$$

Решение полученного неравенства: $-6 \leq x < -2$ или $-2 < x < 0$. Остается учесть условие $x \leq -1, 5$.

Ответ: $[-6; -2) \cup (-2; -1, 5]$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам. Получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, в которых определено исходное неравенство	2
Решение содержит верные преобразования правого сомножителя левой части неравенства, сводящие его к произведению и частному линейных выражений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4 Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C , а на другой – точки A и B , причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение:

Пусть r – искомый радиус, а точка H – основание высоты CH треугольника ABC .

1 случай. Точка C – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC = BC = 5$, и CH – медиана треугольника ABC . Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \quad AB = 2AH = 6.$$

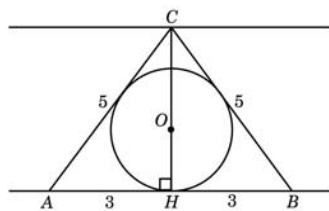


Рис.1

Тогда, если p – полупериметр треугольника, то

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AH \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек A или B . Пусть, для определенности, вершина в точке B . Проведем высоту CH . Если H находится на продолжении стороны AB , то треугольник ABC тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника BHC находим:

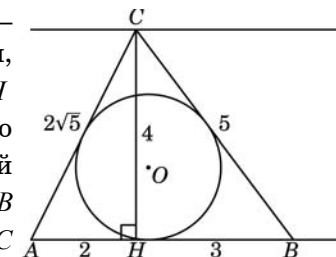


Рис.2

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \quad AH = 5 - 3 = 2.$$

Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{5 \cdot 2}{\frac{1}{2}(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y - 7)(x + y - 7) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Уравнение $(y - 7)(x + y - 7) = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = 7$, $y = 7 - x$.

Система

$$\begin{cases} (y - 7)(x + y - 7) = 0, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

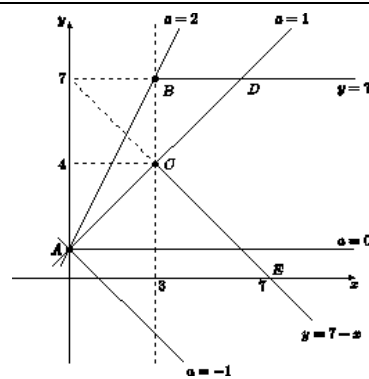
задает части этих прямых, расположенные в полуплоскости $x \geq 3$, т.е. лучи BD и CE , включая точки B и C (см. рис.). Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a , проходящую через точку $A(0; 1)$.

Следует найти все значения a , при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE .

а) Прямая AB задается уравнением $y = 2x + 1$. Поэтому при $a > 2$ прямая m не пересекает ни луч BD , ни луч CE , а при $a = 2$ есть только одна точка пересечения – точка B .

б) Прямая AC задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при $1 < a < 2$ прямая m пересекает луч BD , но не пересекает луч CE , т.е. условие задачи выполнено. При $a = 1$ есть две точки пересечения: C и D .

в) При $0 < a < 1$ прямая m пересекает и луч BD , и луч CE .



г) При $-1 < a \leq 0$ прямая m не пересекает луч BD , но пересекает луч CE , а при $a \leq -1$ прямая m не пересекает ни луч BD , ни луч CE .

Ответ: $-1 < a \leq 0, 1 < a \leq 2$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	3
Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность.	2
Решение содержит: – или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи; – или верное получение квадратного уравнения с параметром a относительно одной из переменных	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

С6 Найдите все тройки натуральных чисел k , m и n , удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ ($1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

Решение:

1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, верны неравенства $n < m$ и $k < m$.
2. Пусть $k \leq n$. Тогда $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n+1) \cdot n!$, откуда $4 \geq n+1$, и $k \leq n \leq 3$.
3. Пусть $k > n$. Тогда $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k+1) \cdot k!$, откуда $4 \geq k+1$, и $n < k \leq 3$.
4. Далее конечным перебором значений $1 \leq n \leq 3, 1 \leq k \leq 3$ находим все решения.

Ответ: $k = 1, n = 2, m = 3; k = n = 3, m = 4; k = 2, n = 1, m = 3$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы	3
Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована	2
Приведен хотя бы один из правильных наборов и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

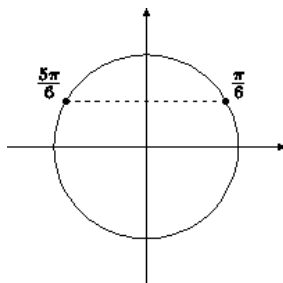
Решение:

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \leq 0$.

Выражение $\sqrt{-\cos x} + 1$ положительно при всех допустимых x .

Значит, $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Так как $\cos x \leq 0$, числа $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$ не являются решениями уравнения.



Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которой равен нулю множитель $2\sin x - 1$. Имеется указание на то, что второй множитель отличен от нуля, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$.

Решение:

M – середина AD_1 , N – середина BC_1 .

Проведем перпендикуляр NH из точки N к плоскости $AB_1 D_1$, $NM \perp AD_1$, Значит $HM \perp AD_1$.

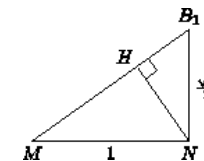
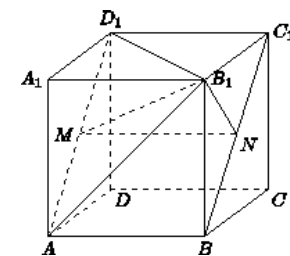
Поэтому точка H лежит на отрезке MB_1 , перпендикулярном AD_1 .

Искомый отрезок NH является высотой прямоугольного треугольника MNB_1 с прямым углом N . Поэтому

$$NH = \frac{NB_1 \cdot NM}{MB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



C3 Решите неравенство

$$\log_3(x^2 + 7x + 10) + \log_3 \frac{x+5}{9} + 1 \geq \log_3(3x^2 + 16x + 20)$$

Решение:

Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases} x^2 + 7x + 10 > 0, \\ x + 5 > 0, \\ 3x^2 + 16x + 20 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x+2)(x+5) > 0, \\ x + 5 > 0, \\ (3x+10)(x+2) > 0; \end{cases} \quad x > -2.$$

Для таких x получаем:

$$\log_3((x+2)(x+5)) - \log_3 \frac{x+5}{9} + 1 \geq \log_3((x+2)(3x+10));$$

$$\log_3(x+2) + \log_3(x+5) - \log_3(x+5) + 3 \geq \log_3(x+2) + \log_3(3x+10);$$

$$\log_3(3x+10) \leq 3; 3x+10 \leq 27; x \leq \frac{17}{3}.$$

Значит, $-2 < x \leq \frac{17}{3}$.

Ответ: $\left(-2; \frac{17}{3}\right]$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам и получен ответ, отличающийся от верного ответа только конечным количеством значений переменной, в которых определены обе части неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C , а на другой – точки A и B , причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение:

Пусть r – искомый радиус, а точка H – основание высоты CH треугольника ABC .

1 случай. Точка C – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC = BC = 13$, и CH – медиана треугольника ABC .

Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, AB = 2AH = 10.$$

Тогда, если p – полупериметр треугольника, то

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AH \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}.$$

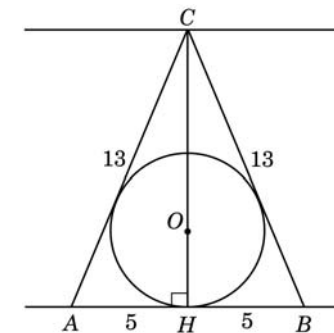


Рис.1

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек A или B . Пусть, для определенности, вершина в точке B .

Проведем высоту CH . Если H находится на продолжении стороны AB , то треугольник ABC тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника BHC находим:

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, AH = 13 - 5 = 8.$$

Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{13 \cdot 6}{\frac{1}{2}(26 + 4\sqrt{13})} = \frac{13 \cdot 6}{13 + 2\sqrt{13}} = \frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$.

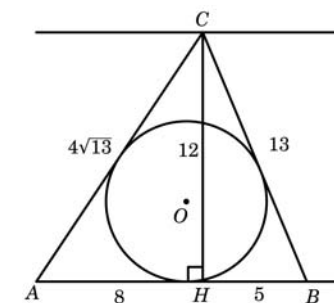


Рис.2

Содержание критерия оценивания	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен <u>правильный ответ</u>	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено <u>правильное значение</u> искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, <u>неправильное из-за арифметической ошибки</u>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

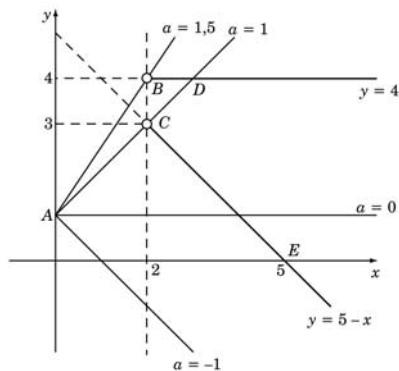
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y - 4)(x + y - 5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

Уравнение $(y - 4)(x + y - 5) = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = 4$ и $y = 5 - x$.

Система

$$\begin{cases} (y - 4)(x + y - 5) = 0, \\ x > 2 \end{cases}$$



задает части этих прямых, расположенные правее прямой $x = 2$, т.е. лучи BD и CE без точек B и C (см. рис.). Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a , проходящую через точку $A(0; 1)$. Следует найти все значения a , при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE .

- а) Прямая AB задается уравнением $y = 1,5x + 1$. Поэтому при $a \geq 1,5$ прямая m не пересекает ни луч BD , ни луч CE .
- б) Прямая AC задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при $1 \leq a < 1,5$ прямая m пересекает луч BD , но не пересекает луч CE .
- в) При $0 < a < 1$ прямая m пересекает и луч BD , и луч CE .
- г) Наконец, при $-1 < a \leq 0$ прямая m пересекает только луч CE , а при $a \leq -1$ она не пересекает ни луч BD , ни луч CE .

Ответ: $-1 < a \leq 0, 1 \leq a < 1,5$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен <u>правильный ответ</u>	4
Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	3
Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	2
Решение содержит: - или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи; - или верное получение квадратного уравнения с параметром a относительно одной из переменных	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

С6 Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение:

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2 + \dots + 7)(13 + \dots + 21) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{13+21}{2} \cdot 9\right) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7)(-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 + 20 + 21) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1 и 4131.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

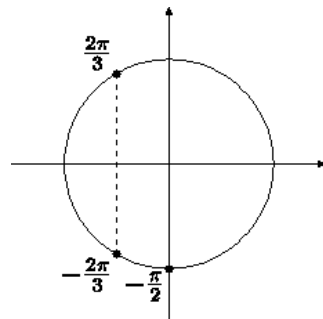
Решение:

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x \leq 0$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 = 0$, то $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Если $\sqrt{-\sin x} - 1 \neq 0$, то $2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.



Так как $\sin x \leq 0$, числа $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ не являются решениями уравнения.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x , при которых равен нулю множитель $2\cos x + 1$ или множитель $\sqrt{-\sin x} - 1$, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите угол между плоскостями $AB_1 D_1$ и $AC D_1$.

Решение:

Пусть M – середина AD_1 , и пусть ребро куба равно 1.

Поскольку треугольники $AB_1 D_1$ и $AC D_1$ правильные, $B_1 M \perp AD_1$ и $CM \perp AD_1$, то есть угол $CM B_1$ – линейный угол искомого двугранного угла.

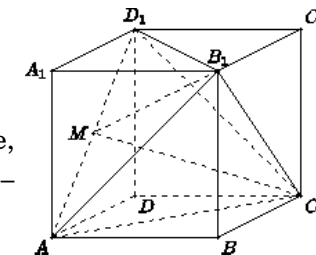
Найдем стороны треугольника $CM B_1$:

$$B_1 C = \sqrt{2}, CM = MB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Применяя к этому треугольнику теорему косинусов, находим:

$$\cos \angle CM B_1 = \frac{MB_1^2 + CM^2 - B_1 C^2}{2MB_1 \cdot CM} = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.



Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите неравенство

$$\log_2(x^2 + 4x) + \log_{0,5} \frac{x}{4} + 2 \geq \log_2(x^2 + 3x - 4).$$

Решение:

Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases} x^2 + 4x > 0, \\ x > 0, \\ x^2 + 3x - 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x + 4) > 0, \\ x > 0, \\ (x - 1)(x + 4) > 0; \end{cases} \quad x > 1.$$

Для таких x получаем:

$$\log_2(x(x+4)) - \log_2 \frac{x}{4} + 2 \geq \log_2((x-1)(x+4));$$

$$\log_2 x + \log_2(x+4) - \log_2 x + 4 \geq \log_2(x-1) + \log_2(x+4);$$

$$\log_2(x-1) \leq 4; \quad x-1 \leq 16; \quad x \leq 17.$$

Значит, $1 < x \leq 17$.

Ответ: (1; 17].

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам и получен ответ, отличающийся от верного ответа только конечным количеством значений переменной, в которых определены обе части неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С4 Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C , а на другой – точки A и B , причем треугольник ABC – остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение:

Пусть r – искомый радиус, а точка H – основание высоты CH треугольника ABC .

1 случай. Точка C – вершина равнобедренного треугольника (см. рис.1). Тогда $AC = BC = 5$, и CH – медиана треугольника ABC . Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \quad AB = 2AH = 6.$$

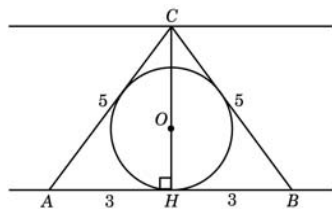


Рис.1

Тогда, если p – полупериметр треугольника, то

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AH \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

2 случай. Вершина равнобедренного треугольника – одна из точек A или B . Пусть, для определенности, вершина в точке B . Проведем высоту CH . Если H находится на продолжении стороны AB , то треугольник ABC тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB (см. рис. 2), то из прямоугольного треугольника BHC находим:

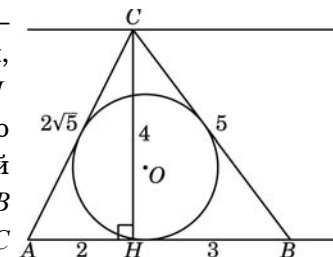


Рис.2

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \quad AH = 5 - 3 = 2.$$

Из прямоугольного треугольника AHC находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{5 \cdot 2}{\frac{1}{2}(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен <u>правильный ответ</u>	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено <u>правильное значение</u> искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, <u>неправильное из-за арифметической ошибки</u>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (y - 7)(x + y - 7) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Уравнение $(y - 7)(x + y - 7) = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = 7$, $y = 7 - x$.

Система

$$\begin{cases} (y - 7)(x + y - 7) = 0, \\ x \geq 3 \end{cases}$$

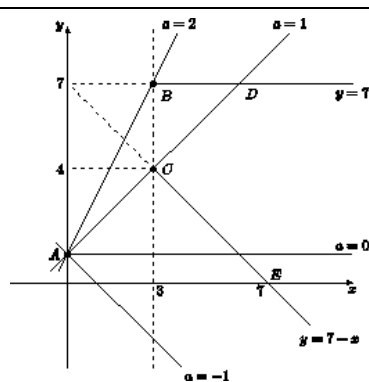
задает части этих прямых, расположенные в полуплоскости $x \geq 3$, т.е. лучи BD и CE , включая точки B и C (см. рис.). Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a , проходящую через точку $A(0; 1)$.

Следует найти все значения a , при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE .

а) Прямая AB задается уравнением $y = 2x + 1$. Поэтому при $a > 2$ прямая m не пересекает ни луч BD , ни луч CE , а при $a = 2$ есть только одна точка пересечения – точка B .

б) Прямая AC задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при $1 < a < 2$ прямая m пересекает луч BD , но не пересекает луч CE , т.е. условие задачи выполнено. При $a = 1$ есть две точки пересечения: C и D .

в) При $0 < a < 1$ прямая m пересекает и луч BD , и луч CE .



г) При $-1 < a \leq 0$ прямая m не пересекает луч BD , но пересекает луч CE , а при $a \leq -1$ прямая m не пересекает ни луч BD , ни луч CE .

Ответ: $-1 < a \leq 0, 1 < a \leq 2$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное. Обоснованно найдены оба промежутка значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность	3
Обоснованно найден хотя бы один промежуток значений параметра из ответа к задаче, при этом возможны неточности с (не)включением концов и(или) вычислительная погрешность.	2
Решение содержит: – или верное описание расположения двух лучей и прямой из условия задачи; – или верное получение квадратного уравнения с параметром a относительно одной из переменных	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

С6 Найдите все тройки натуральных чисел k , m и n , удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ ($1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

Решение:

1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, верны неравенства $n < m$ и $k < m$.
2. Пусть $k \leq n$. Тогда $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n + 1) \cdot n!$, откуда $4 \geq n + 1$, и $k \leq n \leq 3$.
3. Пусть $k > n$. Тогда $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k + 1) \cdot k!$, откуда $4 \geq k + 1$, и $n < k \leq 3$.
4. Далее конечным перебором значений $1 \leq n \leq 3, 1 \leq k \leq 3$ находим все решения.

Ответ: $k = 1, n = 2, m = 3; k = n = 3, m = 4; k = 2, n = 1, m = 3$.

Содержание критерия оценивания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы	3
Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована	2
Приведен хотя бы один из правильных наборов и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4