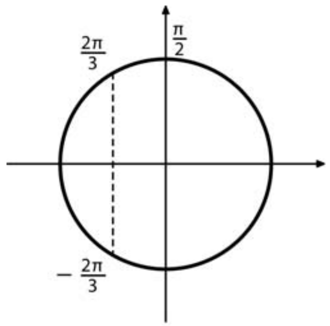
## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**C1** Решите уравнение $\dfrac{(\sin x-1)(2\cos x+1)}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}=0.$

**Решение:**




Левая часть уравнения имеет смысл при $\mathrm{tg}\,x>0$.
Приравняем числитель к нулю:

$$(\sin x-1)(2\cos x+1)=0,$$

откуда $\sin x=1$ или $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.

1 случай: $\sin x=1$. Тогда $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

2 случай: $\cos x=-\dfrac{1}{2}$. Тогда $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Учитывая условие $\cos x\neq 0$, получаем, что числа $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ не являются решениями данного уравнения.

Учитывая условие $\mathrm{tg}\,x>0$, получаем, что числа $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ не являются решениями данного уравнения.

**Ответ:** $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

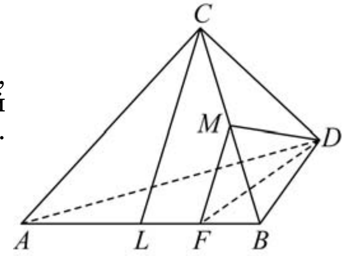
| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной $x$, при которых равен нулю числитель левой части исходного уравнения. Отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |





**C2** Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми $DM$ и $CL$, где $M$ – середина ребра $BC$, $L$ – середина ребра $AB$.

**Решение:**




Пусть прямая $MF$, параллельная прямой $CL$, пересекает прямую $AB$ в точке $F$. Тогда искомый угол между прямыми $DM$ и $CL$ равен углу $DMF$. Обозначим $\angle DMF$ буквой $\alpha$.
$MF$ – средняя линия треугольника $BCL$, поэтому

$$MF=\frac{1}{2}CL=\frac{\sqrt{3}}{4},\ \ BF=\frac{1}{2}BL=\frac{1}{4}.$$

Выразим квадрат отрезка $DF$ по теореме косинусов в двух треугольниках $DMF$ и $BDF$.

$$DF^2=DM^2+FM^2-2DM\cdot FM\cos\alpha=BD^2+BF^2-2BD\cdot BF\cos 60^\circ.$$

Поскольку $DM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $BD=1$, подставляя числовые данные, получим:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha=1+\frac{1}{16}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2};\ \ \cos\alpha=\frac{1}{6}.$$

**Ответ:** $\arccos\dfrac{1}{6}$ .

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**C3** Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8}\le 1.$

**Решение:** Левая часть неравенства имеет смысл при $x>0$, $0,5x\ne 1$ и $0,125x\ne 1$, то есть при $x>0$, $x\ne 2$ и $x\ne 8$.
При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(2x)\cdot\dfrac{1}{\log_2(0,5x)}}{\dfrac{3}{\log_2(0,125x)}}\le 1;\quad \frac{\left(\log_2 2+\log_2 x\right)\left(\log_2 0,125+\log_2 x\right)}{\log_2 0,5+\log_2 x}\le 3;$$

$$\frac{\left(\log_2 x+1\right)\left(\log_2 x-3\right)}{\log_2 x-1}\le 3.$$

Сделаем замену: $y=\log_2 x$. Тогда $\dfrac{(y+1)(y-3)}{y-1}\le 3;\ \ \dfrac{y(y-5)}{y-1}\le 0.$

Получаем: $y\le 0$ или $1<y\le 5$. Следовательно, $0<x\le 1$ или $2<x\le 32$. Осталось исключить точку 8.

**Ответ:** $(0;\ 1];\ (2;\ 8);\ (8;\ 32]$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части исходного неравенства | 2 |
| Верно произведены преобразования, приводящие к неравенству-следствию, дробно-рациональному относительно $\log_2 x$. Возможно, что условия существования левой части данного неравенства не найдены или найдены неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |





**C4** Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований тропеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке $O$; отрезки, соединяющие середину $P$ основания $AD$ с вершинами $B$ и $C$, пересекаются с диагоналями трапеции в точках $M$ и $N$ соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

**Решение:**

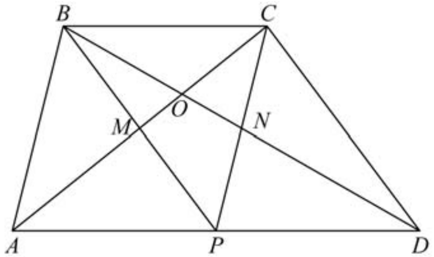


*Рис. 1*

Пусть $h$ – высота трапеции, а основания равны $a$ и $2a$. Тогда

$$S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}h=\frac{3}{2}ah=90,\ \text{откуда}\ ah=60.$$

Пусть $AD=2a,\ BC=a$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому $M$ и $N$ – середины $BP$ и $CP$ соответственно, значит, $CM$ и $BN$ – медианы треугольника $BPC$. Следовательно,

$$S_{OMPN}=\frac{1}{3}S_{\triangle BPC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{6}\cdot 60=10.$$

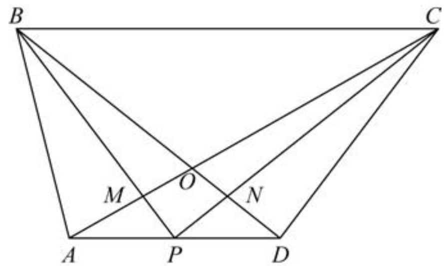


*Рис. 2*

Пусть теперь $BC=2a;\ AD=a$ (рис. 2). Положим, $AM=3t$. Треугольник $AOD$ подобен треугольнику $COB$ с коэффициентом 2, а треугольник $AMP$ – треугольнику $CMB$ с коэффициентом $\dfrac{AP}{BC}=\dfrac{1}{4}$.
Тогда

$$MC=4AM=12t,\quad AC=AM+MC=3t+12t=15t,$$
$$AO=\frac{1}{3}AC=5t,\quad \frac{AM}{AO}=\frac{3t}{5t}=\frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\dfrac{DN}{DO}=\dfrac{3}{5}.$

Высота треугольника $AOD$, проведенная из вершины $O$, равна $\dfrac{1}{3}h$, значит,

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10,$$

$$S_{\triangle DNP} = S_{\triangle AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{\triangle AOD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 3.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle DNP} - S_{\triangle AMP} = 10 - 3 - 3 = 4.$$

**Ответ:** 10 или 4.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |



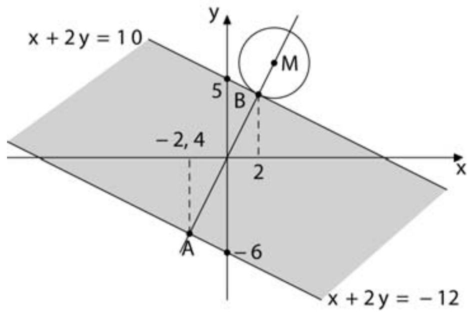


**C5** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \le 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение:**




Преобразуем систему:

$$\begin{cases} -12 \le x + 2y \le 10, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a\,. \end{cases}$$

Неравенство

$$-12 \le x + 2y \le 10$$

задаёт на плоскости полосу, граница которой – пара параллельных прямых:

$$x + 2y = 10 \quad \text{и} \quad x + 2y = -12.$$

Если $a < -2$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной.

Если $a = -2$, то уравнение принимает вид

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 0$$

и задает единственную точку (–2; –4), координаты которой удовлетворяют неравенству

$$|-2 - 8 + 1| = 9 < 11.$$

Следовательно, при $a = -2$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a > -2$. Тогда уравнение

$$(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a$$

определяет окружность радиусом $r = \sqrt{2 + a}$. Центр $M(a;\ 2a)$ окружности лежит на прямой $y=2x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A$ (–2,4; –4,8) и $B$ (2; 4). Система имеет единственное решение, если только окружность внешним образом касается полосы в точке $A$ или в точке $B$. Если точка касания $A$, то $a < -2{,}4$, что невозможно.

Окружность касается полосы в точке $B$, только если $a>2$ и $MB=r$ . Получаем:

$$(a-2)^2+(2a-4)^2=2+a;\quad 5a^2-21a+18=0.$$

Корни: $a=3$, $a=1{,}2$. Условию $a>2$ удовлетворяет только корень $a=3$.

**Ответ:** $-2$, $3$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу | 3 |
| Обоснованно найдено значение 3, однако в ответ включены посторонние значения, полученные в других случаях касания окружности и полосы, либо не рассмотрен случай $a=-2$ (либо рассмотрен, но значение –2 не признано подходящим значением параметра) | 2 |
| Решение содержит<br>- или верное описание взаимного расположения окружности и полосы;<br>- или верный переход к уравнениям относительно $a$ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |





**C6** Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1}-n\,!=5(30k+11).$$

(Для натурального $n$ символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$).

**Решение:**

Очевидно, $5(30k+11)$ делится на $n$. Случай $n=1$ не подходит, а простых делителей, меньших, чем 5, число $5(30k+11)$ не имеет. Следовательно, $n\geq 5$. Тогда $n\,!$ делится на 5 и поэтому в равенстве

$$n^{k+1}=n\,!+5(30k+11)$$

правая часть делится на 5, поэтому левая часть тоже делится на 5. Значит, $n$ делится на 5. Предположим, что $n=5m$, где $m>1$. Тогда после деления на 5 данное уравнение принимает вид

$$5^k m^{k+1}-4\,!\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 5m=30k+11.$$

Левая часть делится на 5, а правая не делится. Противоречие. Осталось рассмотреть случай $n=5$.

Уравнение принимает вид

$$5^{k+1}-5\,!=5\big(30k+11\big),$$

откуда

$$5^{k-1}=6k+7.$$

Очевидно, $k=1$ и $k=2$ не удовлетворяют полученному равенству, а при $k=3$ обе части равны 25.

Остается доказать, что б***о***льших подходящих значений $k$ нет.

Рассмотрим последовательность $a_k=5^{k-1}-6k-7$ и разность $a_{k+1}-a_k$:

$$a_{k+1}-a_k=5^k-6(k+1)-7-5^{k-1}+6k+7=5^{k-1}\cdot 4-6.$$

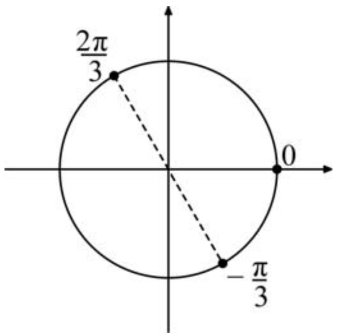
При $k\geq 2$ эта разность положительна, следовательно, последовательность возрастает. Значит, если $k>3$, то $a_k>a_3=0$, а поэтому $5^{k-1}>6k+7$.

**Ответ:** $n=5$, $k=3$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные значения $n$ и $k$ | 4 |
| Обоснованно найдено верное значение $n$; подбором найдено $k$, однако доказательство отсутствия б**о**льших значений $k$ отсутствует или содержит ошибку | 3 |
| Обоснованно найдено верное значение $n$, однако значение $k$ не найдено, найдено неверно или ответ содержит лишние значения $k$ | 2 |
| Имеется верный ответ, найденный подбором или с помощью неполных рассуждений. Обоснование единственности $n$ отсутствует, приведено неполностью или содержит ошибку | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**C1** Решите уравнение $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.




**Решение:**

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$.
Поэтому множитель $\sqrt{\cos x}$ положителен.
1 случай: $\cos x - 1 = 0$. Тогда $x = 2\pi k,\ k \in Z$.
2 случай: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Тогда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Учитывая условие $\cos x > 0$, получаем, что числа

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$$

не являются решениями данного уравнения.

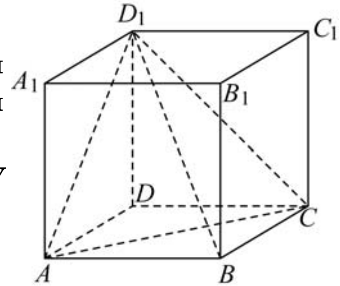
**Ответ:** $2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Верно найдены все значения переменной $x$, при которых равно нулю выражение $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})$, но отбор найденных значений либо не произведен, либо произведен неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |





**C2** Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины $B$ до плоскости $ACD_1$.




**Решение:**
Искомое расстояние от вершины $B$ до плоскости $ACD_1$ равно высоте пирамиды $BACD_1$, опущенной на плоскость грани $ACD_1$.
Обозначим это расстояние $d$ и вычислим объём $V$ пирамиды $BACD_1$ двумя способами:

$$V = \frac{1}{3} \cdot d \cdot S_{ACD_1}; \quad V = \frac{1}{3} \cdot DD_1 \cdot S_{ABC}.$$

Отсюда $d = DD_1 \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ACD_1}}$.

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, поэтому

$$DD_1 = 1,\ S_{ABC} = \frac{1}{2},\ AC = CD_1 = D_1A = \sqrt{2}$$

и поэтому $S_{ACD_1} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**С3** Решите неравенство $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_{0,125x}2}{\log_{0,5x}16}\le\dfrac{1}{4}$.

**Решение:** Левая часть неравенства имеет смысл при $x>0$, $0,5x\ne 1$ и $0,125x\ne 1$,то есть при $x>0$, $x\ne 2$ и $x\ne 8$.
При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(8x)\cdot\frac{1}{\log_2(0,125x)}}{\frac{4}{\log_2(0,5x)}}\le\frac{1}{4};\ \frac{\left(\log_2 8+\log_2 x\right)\left(\log_2 0,5+\log_2 x\right)}{\log_2 0,125+\log_2 x}\le 1;$$

$$\frac{\left(\log_2 x+3\right)\left(\log_2 x\ -1\right)}{\log_2 x\ -3}\le 1.$$

Сделаем замену $t=\log_2 x$. Тогда $\dfrac{(t+3)(t\ -1)}{t\ -3}\le 1$; $\dfrac{t\cdot(t+1)}{t\ -3}\le 0$.

Значит, $t\le -1$ или $0\le t<3$, следовательно, $0<x\le 0,5$ или $1\le x<8$. Осталось исключить точку 2.

**Ответ:** $(0;\ 0,5]$; $[1;\ 2)$; $(2;\ 8)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части исходного неравенства | 2 |
| Верно произведены преобразования, приводящие к неравенству-следствию, дробно-рациональному относительно $\log_2 x$. Возможно, что условия существования левой части данного неравенства не найдены или найдены неверно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |





**С4** Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке $O$; отрезки, соединяющие середину $P$ основания $AD$ с вершинами $B$ и $C$, пересекаются с диагоналями трапеции в точках $M$ и $N$ соответственно. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$.

**Решение:**

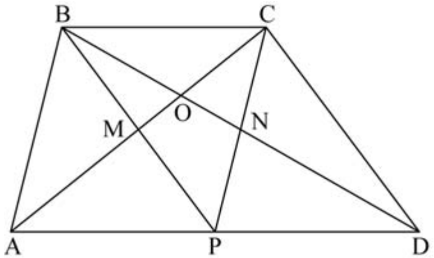


*Рис. 1*

Пусть $h$ – высота трапеции, а основания равны $a$ и $2a$. Тогда

$$S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}h=\frac{3}{2}ah=72,\text{ откуда } ah=48.$$

Пусть $BC=a$; $AD=2a$ (рис.1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому $M$ и $N$ – середины $BP$ и $CP$ соответственно, значит, $CM$ и $BN$ – медианы треугольника $BPC$. Следовательно,

$$S_{OMPN}=\frac{1}{3}S_{\vartriangle BPC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{6}\cdot 48=8.$$

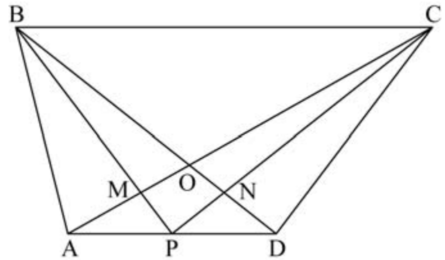


*Рис. 2*

Пусть теперь $BC=2a$; $AD=a$ (рис.2). Положим, $AM=3t$. Треугольник $AOD$ подобен треугольнику $COB$ с коэффициентом 2, а треугольник $AMP$ – треугольнику $CMB$ с коэффициентом $\dfrac{AP}{BC}=\dfrac{1}{4}$.

Тогда

$$MC=4AM=12t,\quad AC=AM+MC=3t+12t=15t,$$

$$AO=\frac{1}{3}AC=5t,\quad \frac{AM}{AO}=\frac{3t}{5t}=\frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\dfrac{DN}{DO}=\dfrac{3}{5}$.

Высота треугольника $AOD$, проведенная из вершины $O$, равна $\dfrac{1}{3}h$, значит,

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8,$$

$$S_{\triangle DNP} = S_{\triangle AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{\triangle AOD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 2,4.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle DNP} - S_{\triangle AMP} = 8 - 2,4 - 2,4 = 3,2.$$

**Ответ:** 8 или 3,2.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ | 3 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины | 2 |
| Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |





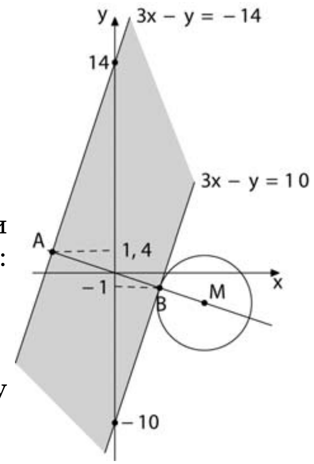
**C5** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \le 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение:**

Преобразуем систему:




$$\begin{cases} -14 \le 3x - y \le 10, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4. \end{cases}$$

Неравенство $-14 \le 3x - y \le 10$ задаёт на плоскости полосу, граница которой – пара параллельных прямых:

$$3x - y = -14 \text{ и } 3x - y = 10.$$

Если $a < -\frac{4}{3}$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной.

Если $a = -\frac{4}{3}$, то уравнение принимает вид

$$(x + 4)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = 0$$

и задает единственную точку $\left(-4;\ \frac{4}{3}\right)$, координаты которой удовлетворяют неравенству:

$$\left|-12 - \frac{4}{3} + 2\right| = \frac{34}{3} < 12.$$

Следовательно, при $a = -\frac{4}{3}$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a > -\frac{4}{3}$. Тогда уравнение

$$(x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4$$

определяет окружность радиусом $r=\sqrt{3a+4}$. Центр $M(3a;\ -a)$ окружности лежит на прямой $y=-\frac{1}{3}x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A(-4{,}2;\ 1{,}4)$ и $B(3;-1)$. Система имеет единственное решение, если только окружность касается полосы в точке $A$ или в точке $B$. Если точка касания $A$, то $-a>1,4$, что невозможно, поскольку $a>-\frac{4}{3}$.

Окружность касается полосы в точке $B$, только если $a>1$ и $MB=r$. Получаем:

$$(3-3a)^2+(-1+a)^2=3a+4;\quad 10a^2-23a+6=0.$$

Корни: $a=2$, $a=0,3$. Условию $a>1$ удовлетворяет только корень $a=2$.

**Ответ:** $-\frac{4}{3}$, 2.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 4 |
| Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу | 3 |
| Обоснованно найдено значение 2, однако в ответ включены посторонние значения, полученные в других случаях касания окружности и полосы, либо не рассмотрен случай $a=-\frac{4}{3}$ (либо рассмотрен, но соответствующее значение не признано подходящим значением параметра) | 2 |
| Решение содержит<br>- или верное описание взаимного расположения окружности и полосы;<br>- или верный переход к уравнениям относительно $a$ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |





**C6** Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1}-n\,!=7(420k+1).$$

(Для натурального $n$ символом $n!$ обозначается

произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$).

**Решение:**

Очевидно, $7(420k+1)$ делится на $n$. Случай $n=1$ решений не дает. Простых делителей меньших, чем 7, число $7(420k+1)$ не имеет. Следовательно, $n\geq 7$. Тогда $n\,!$ делится на 7 и поэтому в равенстве

$$n^{k+1}=n\,!+7(420k+1)$$

правая часть делится на 7, тогда левая часть тоже делится на 7. Значит, $n$ делится на 7.

Предположим, что $n=7m$, где $m>1$. Тогда после деления на 7 данное уравнение принимает вид

$$7^k m^{k+1}-6\,!\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot 7m=420k+1.$$

Левая часть делится на 7, а правая не делится. Противоречие. Осталось рассмотреть случай $n=7$.

Уравнение принимает вид $7^{k+1}-7\,!=7\big(420k+1\big)$, откуда

$$7^{k-1}=60k+103.$$

Очевидно, $k=1$, $k=2$ и $k=3$ не удовлетворяют полученному равенству, а при $k=4$ обе части равны 343. Остается доказать, что б***о***льших подходящих значений $k$ нет. Рассмотрим последовательность $a_k=7^{k-1}-60k-103$ и разность $a_{k+1}-a_k$:

$$a_{k+1}-a_k=7^k-60(k+1)-103-7^{k-1}+60k+103=7^{k-1}\cdot 6-60.$$

При $k\geq 3$ эта разность положительна, следовательно, последовательность возрастает. Значит, если $k>4$, то $a_k>a_4=0$, а поэтому $7^{k-1}>60k+103$.

**Ответ:** $n=7$, $k=4$.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получены верные значения $n$ и $k$ | 4 |
| Обоснованно найдено верное значение $n$; подбором найдено $k$, однако доказательство отсутствия б***о***льших значений $k$ отсутствует или содержит ошибку | 3 |
| Обоснованно найдено верное значение $n$, однако значение $k$ не найдено, найдено неверно или ответ содержит лишние значения $k$ | 2 |
| Имеется верный ответ, найденный подбором или с помощью неполных рассуждений. Обоснование единственности $n$ отсутствует, приведено неполностью или содержит ошибку | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |